Tweede Sterrenwacht lezing
NAI Rotterdam
9 oktober 1995

Programma

Arnoldus Prager geb. 1897	*Elegie voor viool en piano*	
	Viool	Hans Rijkmans
	Piano	Hendrik Jan Bosma
Sterrenwachtlezing	Henk Barendregt	
	Over wiskunde en kunst	
Samenspraak	Peter Struycken & Henk Barendregt	
	De beoefening van kunst en wiskunde	
Jules Massenet 1842-1912	*Méditation* (uit de opera Thaïs)	
	Viool	Hans Rijkmans
	Piano	Hendrik Jan Bosma

Sterrenwachtlezing

Over wiskunde en kunst

Dames en Heren,

Reeds vele millennia houden mensen zich bezig met het scheppen van wiskunde en van kunst. Toch is het mogelijk om in het tijdsbestek van deze lezing nader in te gaan op een aantal wezenlijke kenmerken van deze twee bezigheden.

Een typisch wiskundige manier om een complex probleem aan te pakken is die van de vereenvoudiging. Men beschouwt alleen een aantal aspecten van de situatie en bij de juiste keuze daarvan kan een oplossing gevonden worden, die ook relevant is voor het meer complexe geheel. Dit vereenvoudigen heet ook wel 'abstraheren'. Maar omdat dat woord—ten onrechte—bij sommige mensen nare associaties opwekt, zal ik het verder weinig gebruiken.

Ons probleem—iets over de wiskunde en de kunst te zeggen—zullen we aanpakken door middel van vereenvoudiging. We gaan in eerste instantie praten over de beoefening ervan, om daarna pas iets over de twee vakken zelf te zeggen. Een aantal kenmerken van de wiskunde zijn overigens ook geldig voor andere wetenschappen, met name de exacte.

Voordat we beginnen, wil ik u een anekdote vertellen over de angst voor het vereenvoudigen. Want hoewel dit woord een eufemisme is voor het andere woord dat ik net taboe verklaard heb, de negatieve emotie bij dat andere woord is misschien nog niet helemaal weg. Eén van mijn nichten is kleuterleidster. Omdat ik een voorstander ben van Montessori onderwijs op de kleuterschool, vertelde ik haar over het door deze methode gebruikte lesmateriaal. Zo heb je 'de rits': een vierkante houten lijst met aan weerszijden een stukje stof. Deze twee stukjes kunnen nu met een rits aan elkaar bevestigd worden. De leerling ziet hoe het gaat, probeert het ook te doen, en kan zelf bepalen of het juist of niet juist gedaan is. Door deze 'zelfcontrole van de fout' kan de leerling onafhankelijk leren om het werkje te doen en wordt deze gemotiveerd wanneer de juiste behendigheid verkregen is. De motivatie werkt sterker, omdat de leerling weet dat hij of zij iedere morgen door een volwassene ingeritst moest worden, maar het nu zelf kan doen. Zo zijn er ook andere werkjes in de zelfde klasse: de strik, de drukknoopjes. Mijn nicht nu bleek geen voorstander te zijn van dit les materiaal. Zij vond dat, door het probleem uit te vergroten tot een vierkant rek met de genoemde sluitmechanismen, de samenhang met een groter geheel verloren ging.

Haar voorkeur was om het kind een pop met kleren te geven, waarop de drie sluitmechanismen geoefend kunnen worden, maar dan nu in context. Als wiskundige, die wèl van vereenvoudigen houdt, zeg ik dan dat je door de context van de pop afgeleid wordt: je kunt met de pop gaan spelen, terwijl het de bedoeling was om te leren hoe de rits en andere sluiters werken.

De weerstand tegen de uitvergroting van de rits heeft te maken met de angst voor het *reductionisme*. Men denkt dat door het bestuderen van details het grotere geheel verloren gaat. Dat is inderdaad het geval indien je jezelf verliest in de details. Maar dat is de bedoeling niet. Ik zie dan ook dat het reductionisme en het zogenaamde 'whole-isme' (dat naar het grotere geheel kijkt) goed samen kunnen gaan. Je kunt met de pop spelen nadat je de sluitmechanismen apart hebt geoefend.

Door ons te beperken tot de beoefening van de wiskunde en kunst, kunnen we voorlopig even voort. De zaken die we willen onderzoeken komen nu als vanzelf.

Iemand die iets doet, moet daarvoor de nodige *motivatie* hebben. Maar motivatie is niet voldoende. Je moet ook iets kunnen, in het geval van wiskunde of kunst bestaat dat uit het beheersen van de voor die vakken benodigde techniek. Deze *ambachtelijke* kant van het vak is nodig, omdat er zowel in de wiskunde als in de kunst nieuwe werelden worden geschapen en deze moeten goed in elkaar zitten.

Daarnaast moet er ook *creativiteit* zijn. Waar ik op doel, is datgene waarmee een kunstwerk of een stuk wiskunde verheven wordt boven de middelmaat. Zonder creativiteit is kunst of wiskunde eigenlijk de moeite niet waard. 'Creativiteit' wordt ten onrechte vaak verward met 'inspiratie'. Iemand die nog nooit een gedicht heeft gemaakt kan denken, wanneer hij verliefd is bijvoorbeeld, dat hij inspiratie heeft om een sonnet te schrijven. Zeer waarschijnlijk zal hier weinig van terecht komen, omdat hij de benodigde ambachtelijke discipline mist. Zijn gevoel van inspiratie gebaseerd op verliefdheid is meestal een eenmalige motivatie, maar niet voldoende voor creativiteit. Strawinsky zei wel eens: "Inspiratie? Daar heb ik niets mee te maken. Het is half tien; hup naar boven, componeren!"

Tenslotte is nog belangrijk als mentale voorwaarde voor het scheppen van kunst of wetenschap de *reflectie* op hetgeen voorheen gemaakt is.

Samengevat, voor de beoefening van wiskunde/kunst—en daarmee bedoel ik het scheppen ervan—zijn de volgende mentale condities noodzakelijk: motivatie, ambachtelijkheid, creativiteit en reflectie. We zullen ze één voor één bespreken. Voor wat betreft de wiskunde zal ik

o.a. gebruik maken van wat erover gezegd is door anderen, te weten de schrijver Musil in zijn roman ‘De man zonder eigenschappen’ [2] en de wiskundige Poincaré in zijn boek ‘Science et méthode’ [3]. De mentale condities voor het scheppen van kunst komen straks aan de orde in samenspraak met Peter Struycken.

-=-

Motivatie

Er zijn twee belangrijke redenen om wiskunde (en wetenschap) te beoefenen. De eerste is het verkrijgen van inzicht; de tweede is de beheersing van delen van de werkelijkheid, die je met dat inzicht kunt verkrijgen.

Inzicht betekent dat een grote hoeveelheid verschijnselen teruggebracht kan worden tot een kleiner aantal. Inzicht gaat meestal gepaard met sterke emoties: die van schoonheid en van interesse.

Beheersing ontstaat doordat we met behulp van inzicht voorspellingen kunnen doen. Wanneer we een bepaalde situatie willen bereiken, dan kunnen we gebruik maken van de voorspellende kracht van inzicht, doordat bepaalde condities de gewenste situatie tot gevolg hebben. Willen we bijvoorbeeld een kamer op een temperatuur van 21 ^{o}C brengen, dan kunnen we of een verwarming of een airconditioner gebruiken, al naar gelang het seizoen. Beheersing is prettig omdat we daarmee soms onze verlangens kunnen vervullen en onze ongenoegens kunnen omzeilen.

Bij veel wetenschappers is het verkrijgen van inzicht de voornaamste drijfveer tot hun vak. Dat komt vaak door de eenvoud en elegantie van het inzicht. Het is niet zo dat een wiskundige of wetenschapper altijd sneller kan redeneren of rekenen dan een leek. Maar het redeneren verloopt meer geordend, langs minder grillige paden, zodat er veel energie overblijft voor andere zaken. Musil zegt (p. 145):

“Hoe helderder het brein, des te minder men ervan merkt.”

Aan de andere kant staat bij de sponsors van de wetenschap de beheersing meestal voorop. Dat is vanuit historisch perspectief een interessant gegeven. Door alle eeuwen heen zien wij deze discrepantie. Galileo werd aan de universiteit van Pisa niet betaald voor zijn uiterst belangrijke experimenten met vallende lichamen, die uiteindelijk één van de basis gegevens vormden voor het werk van Newton en daarmee voor de wetenschappelijke en industriële revolutie. Hij werd betaald voor het onderwijs aan studenten medicijnen in het berekenen van planeetbanen, zodat die gebruikt konden worden voor astrologische voorspellingen! U

ziet, het verlangen naar beheersing is zo groot dat men zelfs voor schijnbeheersing al wil betalen.

Toch zijn de toepassingen van de wetenschap belangrijk. Door het zoeken hiernaar zijn vaak nieuwe fundamentele wetten ontdekt, die op hun beurt weer nieuwe toepassingen mogelijk maken.

De moraal is, dat er een gezonde verhouding dient te zijn tussen fundamenteel en toegepast onderzoek. Ik kom straks nog even terug op het fundamentele verschil tussen beheersing en inzicht.

Ambachtelijkheid

Het bezig zijn met wiskunde is een ambacht. Slechts door hard werken kan men tot resultaten komen. Een van de farao's van Egypte vroeg aan de Griekse wiskundige Eudoxus (ca. 400-347 v. Chr.) of deze hem de geheimen van de wiskunde wilde bijbrengen. Afgesproken werd dat de farao regelmatig lessen zou krijgen. Bij iedere les gaf Eudoxus huiswerk op. Steeds bleek dat de farao op de volgende les zijn opgaven niet gemaakt had. Toen Eudoxus aan bleef dringen dat het huiswerk gedaan moest worden, dacht de farao dat zijn leraar eigenlijk geen zin had om hem in te wijden in de geheimen van de wiskunde. De farao zei toen: “O Eudoxus, ik betaal u uw gewicht in goud als ge mij de wiskunde leert zonder dat ik opgaven hoef te maken.” Daarop antwoordde Eudoxus: “O Sire, er is geen koninklijke weg tot de wiskunde.” Dat geldt overigens voor de meeste menselijke activiteiten die de moeite waard zijn.

Voor de nodige discipline om zich het ambachtelijke niveau meester te maken is veel tijd nodig. Aristoteles zei eens: “De Egyptenaren waren goed in wiskunde omdat aan hun priesters vrije tijd vergund was.” Deze benodigde tijd is de prijs die betaald moet worden voor de precisie van de wiskunde. Maar deze precisie is de moeite waard. Musil schreef over de man zonder eigenschappen (die wiskundige was en over zijn vak nadacht) (p. 144):

“De nauwkeurigheid, kracht en zekerheid van dit denken, die in het leven hun weerga niet kennen, vervulden hem bijna met zwaarmoedigheid.”

Om de benodigde tijd voor het verkrijgen van ambachtelijke vaardigheden in de wiskunde op te kunnen brengen, is een beloning noodzakelijk. Deze kan alleen verkregen worden, indien na een initiële motivatie nieuwe inzichten ontstaan met de daarbij behorende sterke emoties.

Creativiteit

We spraken reeds over de mogelijke verwarring tussen dit begrip en het meer romantische woord ‘inspiratie’. Creativiteit leidt tot nieuwe resultaten. Er zitten twee aspecten aan. Het vinden van nieuwe resultaten binnen een bepaalde context en het vernieuwen van zo’n context. Over het vernieuwen van een wetenschappelijke context zal ik straks iets meer zeggen. Eerst iets over nieuwe resultaten binnen een gegeven context.

Met behulp van motivatie, ambachtelijke discipline en creativiteit is in de wiskunde en wetenschap zeer veel tot stand gebracht. Musil zegt dit mooi (p. 53):

“Als je in plaats van wetenschappelijke beschouwingen levensbeschouwingen zou nemen, in plaats van hypothese poging en in plaats van waarheid daad, zou er geen enkel levenswerk van een belangrijk natuuronderzoeker of wiskundige bestaan dat wat moed en revolutionaire kracht de grootste daden in de geschiedenis niet verre zou overtreffen.”

Hoe gaat creativiteit in zijn werk? In het citaat van Strawinsky waarin hij een lage dunk heeft van inspiratie, maar dat eigenlijk over creativiteit gaat, wordt gewezen op discipline (“hup naar boven”). Ook Musil zegt zoiets (p. 144):

“Een groot ontdekker had, toen men hem eens vroeg hoe hij het klaarspeelde zo vele nieuwe ideeën te krijgen, geantwoord: ‘Doordat ik er onophoudelijk aan dacht.’ En inderdaad, men mag gerust stellen, dat onverwachte invallen door niets anders komen, dan doordat men ze verwacht. Ze zijn voor een niet gering deel de vrucht van karakter, regelmatige gewoonten, taaie ambitie en onophoudelijk ermee bezig zijn.”

Dan zegt Musil iets dat bijna oneerbiedig lijkt (p. 144):

“Maar in een ander opzicht voltrekt het oplossen van een intellectueel probleem zich niet heel anders dan als wanneer een hond die een stok in zijn bek heeft door een smalle deur wil; hij draait zijn kop dan net zo lang naar links en naar rechts tot de stok erdoorheen schiet, en wij doen het precies zo, alleen met dit verschil dat wij het niet helemaal op goed geluk proberen, maar uit ervaring al ongeveer weten hoe je het moet aanpakken.”

Iets wat niet algemeen bekend is, maar wel bij wiskundigen, is het belang van de intuïtie hierbij. Meer nog dan het vermogen om te redeneren of te rekenen is de intuïtie een noodzakelijke voorwaarde voor het doen van

goede wiskunde. Intuïtie is het ‘uit ervaring weten hoe je het moet aanpakken’, waar Musil over sprak. Het redeneren en rekenen—dat meer behoort tot het ambachtelijke vlak—blijft echter relevant, omdat je daarmee controle uitoefent op je intuïtie. Ze werken dus samen.

Maar dames en heren, we draaien in een kringetje rond. Eerst sprak ik over ‘creativiteit’ en ‘inspiratie’; nu heb ik het over ‘intuïtie’. Dat zijn allemaal maar woorden. Waar we naar op zoek zijn, is het vermogen om belangrijke wiskunde te doen. Laten we opnieuw beginnen.

We zijn op zoek naar datgene, dat ons beter dan een hond in staat stelt om problemen op te lossen. Wiskundigen zijn niet erg bedreven in het beschrijven van het proces hoe dit gebeurt. Er is echter een belangrijke uitzondering, de grote Franse wiskundige Henri Poincaré (1854-1912). In zijn boek ‘Science et méthode’ beschrijft deze op een fenomenologische manier—vanuit zijn eigen ervaringen—hoe problemen opgelost worden. Daarna geeft hij ook nog een interessante theorie ter verklaring.

De ervaringen die Poincaré beschrijft bij het ontdekken van nieuwe wiskunde zijn welbekend bij de beoefenaars van het vak. Het komt ongeveer hierop neer.

Men heeft een probleem.
Men zoekt een oplossing.
Men vindt die niet.
Men denkt na waar je dan verder moet kijken.
Men zoekt verder. Weer vindt men niets.
Enzovoorts.

Uiteindelijk wordt men door de omstandigheden gedwongen iets anders te gaan doen, iets buiten de wiskunde. Daarna is het Poincaré meermalen overkomen dat de oplossing opeens als vanzelf—uit het niets—verschijnt in zijn geest. Soms na een periode van enkele dagen; soms na enkele maanden. Wel is nodig dat de oplossing gecontroleerd wordt.

Schematisch weergegeven:

rationeel denken: oplossing zoeken (geen oplossing); iets anders doen: oplossing komt vanzelf (na verloop van tijd); rationeel denken: oplossing wordt gecontroleerd.

Poincaré benadrukt de noodzakelijkheid van de twee perioden van rationeel denken (voor en na de oplossing). Verder is het niet zo, dat men altijd iets anders moet doen wil de oplossing komen. Deze kan ook komen, terwijl men ernaar zoekt. Maar omdat er niet voorspeld kan worden, hoe lang een oplossing op zich laat wachten, is men vaak reeds iets anders aan het doen.

De verklaring die Poincaré geeft van de uit het niets opkomende oplossing is interessant. Hij stelt, dat er tijdens de periode van bewust werken aan een oplossing een zoekproces op gang wordt gezet. Wanneer dat proces voldoende ‘vaart’ heeft, dan gaat—ook al doet men iets anders—het zoeken door in het onbewuste (Poincaré noemt het ‘le moi inconscient’ of ‘le moi subliminal’). Wanneer het onbewuste nu een oplossing gevonden heeft, dan ontstaat er een zo sterke positieve emotie van schoonheid, dat de oplossing doorsijpelt naar het gewone bewustzijn. Dus het onbewuste blijft voortdurend proberen (net als de hond van Musil) totdat de juiste oplossing gevonden wordt en doet dan een wekker afgaan zodat de vondst bewust wordt. Poincaré zegt dat hij deze hypothetische theorie mooier vindt dan een andere theorie, die zegt dat het onbewuste intelligenter is dan het gewone bewustzijn. Bovendien heeft hij nog een partieel argument voor de juistheid van zijn theorie. Namelijk in die gevallen dat er een pseudo-oplossing naar boven komt, die na rationele controle door de mand valt, is het bijna altijd zo dat dit foutieve idee, indien het juist geweest zou zijn, ons natuurlijke gevoel voor wiskundige schoonheid geprikkeld zou hebben.

Poincaré stelt dat het dus belangrijk is om een ontwikkeld gevoel voor wiskundige schoonheid te hebben, zodat dit kan functioneren als zeef voor de vele kandidaat oplossingen gegenereerd door het onbewuste. Die zeef hebben we nodig, omdat de meeste kandidaat oplossingen fout zijn.

Naast het partiële argument ten gunste van Poincaré’s hypothese is het ook de moeite waard om met andere middelen de waarheid ervan na te gaan. Met de moderne technieken om de activiteiten in onze hersenen te registreren—zoals PET (positron emmision tomography), MRI (magnetic resonance imaging), ERP (event related potential) en MEG (magnetoencephalogram)—is dat misschien wel heel goed mogelijk.

Reflectie

Motivatie, ambachtelijkheid en creativiteit zijn niet altijd voldoende om tot belangwekkende wiskunde te komen. Vaak is een zekere nabeschouwing nodig over hetgeen gedaan is. Dat is nu de reflectie. Men kan daarmee op een onverwachte manier zaken uit een deelgebied van de wiskunde in verband brengen met aspecten van een ander deelgebied. Verder kan men er nieuwe contexten mee creëren. Ik noem een aantal voorbeelden.

Euclides ontwikkelde de vlakke meetkunde vanuit een klein aantal axioma's. Eén van die axioma's, het zogenaamde parallellen axioma, zegt het volgende. Gegeven een lijn en een punt buiten die lijn, dan is er precies één lijn, die door het gegeven punt gaat maar niet de gegeven lijn

snijdt. Dit axioma is iets ingewikkelder dan de andere axioma's. [Zo'n ander axioma is bijvoorbeeld dat er door twee verschillende punten precies één lijn gaat.] In een reflectie over de axioma's stelde men later de vraag, of het parallellen axioma misschien niet uit de andere axioma's afgeleid kon worden. Dit bleek niet het geval te zijn, omdat men net zo goed met de negatie van het parellellen axioma bleek te kunnen werken. Dit gaf aanleiding tot de zogenaamde niet-Euclidische meetkunde. Einstein heeft bij het opstellen van zijn relativiteitstheorie gebruik kunnen maken van een reeds ontwikkelde vorm van niet-Euclidische meetkunde.

Een bekend voorbeeld van wederzijdse bevruchting tussen twee deelgebieden van de wiskunde is de analytische meetkunde van Decartes en Fermat. Door middel van het invoeren van coördinaten kunnen meetkundige problemen vertaald worden naar de algebra. Later bleek, dat omgekeerd een belangrijke klasse van rekenkundige problemen gemakkelijker kunnen worden opgelost, door ze naar een meetkundige context te vertalen.

Deze voorbeelden tonen aan, dat reflectie de nodige verdieping kan aanbrengen.

Musil beschrijft dit mooi. Eerst geeft hij wat af op ingenieurs die niet tot reflectie in staat zouden zijn (Musil was zelf een ingenieur, dus dat valt soms mee); daarna stelt hij dat in de wiskunde reflectie vaker voorkomt. Althans zo interpreteer ik deze passage (p. 51).

"Het is te begrijpen dat een ingenieur opgaat in zijn specialisme in plaats van in de vrijheid en ruimte van de ideeënwereld uit te komen, al worden zijn machines tot aan de uithoeken van de aarde geleverd; want hij hoeft evenmin in staat te zijn het gedurfde en het nieuwe van de ziel van zijn techniek over te dragen op zijn persoonlijke ziel als een machine in staat is om de aan haar ten grondslag liggende infinitesimaalvergelijkingen op zichzelf toe te passen. Van de wiskunde kan dat niet gezegd worden; die is de nieuwe denkmethode zelf, de geest zelf, daarin liggen de bronnen van de tijd en de oorsprong van een kolossale transformatie."

Straks zal ik laten zien dat wiskunde inderdaad voortdurend op zichzelf teruggrijpt.

Door het veranderen van context, van paradigma zoals Kuhn dat noemt, ontstaan er in de wetenschap vaak radicale veranderingen. Musil vergelijkt dit met de situatie van de moraal, waarin je zulke omwentelingen vrijwel nooit tegen komt (p. 53/54):

“De man moet nog geboren worden die tot zijn aanhangers zou kunnen zeggen: steel, moord, bedrijf ontucht—onze leer is zo sterk dat ze van de gier uwer zonden bruisend helder bergwater maakt; in de wetenschap daarentegen komt het om de paar jaar voor dat iets dat tot dan toe als een misvatting gold opeens alle opvattingen in hun tegendeel doet verkeren of dat een onbetekenend en geminacht idee de heerseres wordt van een nieuw ideeënrijk, en zulke voorvallen zijn daar niet alleen omwentelingen maar leiden als een jacobsladder omhoog. In de wetenschap gaat het net zo kras en onbekommerd en prachtig toe als in een sprookje.”

Overigens gaat Kuhn, die ik zonet noemde, veel te ver in zijn beschouwingen. Hij doet alsof er geen absolute waarheid is in wetenschap. Die is er wel, alleen is ze meestal veel ingewikkelder dan we denken.

-=-

U heeft nu een aantal belangrijke mentale condities voor het scheppen van wiskunde leren kennen. Laat ik nu iets gaan wagen: een beschrijving geven van de wiskunde zelf. Het is—zoals steeds—een vereenvoudiging, maar een bruikbare.

(Exacte) wetenschappen

Voordat we de wiskunde gaan beschrijven moeten we iets meer zeggen over de exacte wetenschappen. Een wetenschap kiest een *domein*, dat is een deelgebied van de werkelijkheid met daarbij een klasse van eigenschappen die bestudeerd worden. Zo kiest de zoölogie als domein de dieren en bijvoorbeeld als eigenschappen het gewerveld zijn of het zoogdier zijn. De beperking tot een domein spreekt voor zich: je kunt niet alles onderzoeken. Maar evenzo is de beperking tot een bepaalde klasse van eigenschappen belangrijk. Dieren zijn namelijk ook onderworpen aan de valwetten. Maar de bestudering daarvan behoort niet tot de zoölogie maar tot de mechanica. De mechanica heeft als domein alle voorwerpen en als bestudeerde eigenschappen het gedrag onder elastische botsing, bewegingen zoals vallen en roteren, enzovoorts.

In de exacte wetenschap maakt men vaak gebruik van een *model*. Dat is een theorie met abstracte objecten en eigenschappen die gepostuleerd worden geldig te zijn voor die objecten. Deze postulaten worden verkregen door naar een domein in de werkelijkheid te kijken en zekere eigenschappen van concrete objecten in een wet vast te leggen. Zo praat de mechanica over de valwet voor puntmassa's die een abstractie vormen van concrete voorwerpen.

Wanneer een model eenmaal gegeven is, dan wordt daarmee op een wiskundige manier gewerkt: men redeneert, men rekent. Zo kun je uit de valwetten afleiden hoe twee puntmassas om elkaar draaien op grond van de zwaartekracht. Dit kan dan toegepast worden ter verklaring van de planeetbewegingen.

Wiskunde

Maar nu de wiskunde. Dit vak bestaat uit *definiëren*, *redeneren* en *rekenen*. Dat definiëren dient in de eerste plaats voor de beschrijving van een model (bijvoorbeeld voor de natuurkunde). Met redeneren en rekenen worden tot nu toe onbekende eigenschappen van dat model gevonden. Men kan echter ook modellen maken die hun oorsprong niet vinden in de empirische waarnemingen, maar die afgeleid worden uit reeds eerder geconstrueerde modellen. Wiskunde voor de wiskunde. Dat lijkt op inteelt, maar is het zeer zeker niet. Het is een wezenlijk onderdeel van de wiskunde, zonder hetwelk er vele problemen (van praktische aard) niet opgelost kunnen worden. De rol van het definiëren in de wiskunde mag hierbij niet onderschat worden. Hiermee schept men namelijk nieuwe modellen. Hoe gaat dat in zijn werk?

Het zal u verbazen hoe gemakkelijk dat lijkt te gaan. U zult het wellicht niet geloven. Het gaat namelijk door middel van het principe:

> ‘Wat een naam heeft, dat bestaat.’

Maar pas op. Als je zegt: ‘Er is een staf; daarmee kun je toveren’, dan heb je nog geen toverstaf. Dit is echter een verkeerd gebruik van het principe. Hoe gaat het dan wel? Ten eerste worden er alleen formele modellen gecreëerd. Dat gaat door middel van een taal waarin namen voorkomen; van die namen doe je net alsof ze corresponderen met echt bestaande dingen. Verder postuleer je een aantal eigenschappen. Je doet net alsof die geldig zijn. Toch heeft zo’n formeel model wel degelijk bestaansrecht. Om daar succes mee te hebben moet er voldaan zijn aan een paar eisen:

consistentie	-	er mag geen contradictie optreden;
diepgang	-	het formalisme moet voldoende complex zijn;
samenhang	-	er moet voldoende verband zijn met de werkelijkheid of met andere modellen.

We geven een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1. De natuurlijke getallen 0, 1, 2, 3, ...

Je zegt 0 (nul) is een getal;
als n een getal is, dan is Sn ook een getal.

Denk bij Sn aan n+1 (de opvolger 'successor' van n). Volgens het principe 'Wat een naam heeft dat bestaat' hebben we nu de volgende getallen.

0	
S0	(noem dit 1)
SS0	(noem dit 2)
SSS0	(3)
...	enzovoorts

U ziet, getallen hebben nog niets met de werkelijkheid te maken. Ze bestaan alleen als symbool. Maar nu kunnen we er iets mee gaan doen. We kunnen met deze symbolen *rekenen*. Bijvoorbeeld kunnen we de optelling n+m definiëren:

$$0 + m = m$$
$$Sn + m = S(n + m)$$

We zeggen hoe we 0 bij een getal m moeten optellen; verder zeggen we hoe we Sn bij het getal m moeten optellen als we al weten hoe we n bij m moeten optellen. Dus we kunnen nu bijvoorbeeld uitrekenen

$$S0 + S0 = S(0 + S0) = SS0,$$ ofte wel 1+1 = 2.

Waarin zit nu de kracht van de gecreëerde objecten? De constructies kunnen in verband met de werkelijkheid worden gebracht.

` `	→	2 = SS0
` ` `	→	3 = SSS0
----------		+
` ` ` ` `	→	5 = SSSSS0

Dit is tellen in het 1-tallig stelsel; wat onhandig, maar 6000 jaar geleden deed men het zo. Nu kan men het beter in het 10-tallig stelsel. Of met behulp van een machine in het 2-tallige stelsel (en dan vele miljoenen optellingen per seconde).

De wiskundige is nuttig omdat de objecten geconstrueerd zijn met interne operaties. Deze corresponderen met operaties in de werkelijkheid. De getallen vormen een model dat bijvoorbeeld nuttig is voor mensen die van bezit houden. In plaats de toename (of afname) van hun bezittingen steeds te moeten tellen is het voldoende wat te rekenen. [Iemand die eerst 37 koeien heeft en er dan 14 bijkrijgt bezit daarna 51 koeien. Dat kan hij uitrekenen zonder naar de stal te gaan om de koeien te tellen. Wiskunde is als een graafmachine: de bestuurder hoeft alleen maar een klein pookje naar boven te trekken; de machine zorgt er dan voor dat er een zware grijpschep met zand naar boven komt. Buiten regent het en het zand is vies. De bestuurder zit droog en maakt zijn handen niet vuil. Dit is abstraheren. Begrijpt u?]

Voorbeeld 2. Negatieve getallen.

Een eenvoudig voorbeeld van wiskunde voor de wiskunde is het volgende. Negatieve getallen zijn een model op een model dat handig is als je wel eens rood staat op de bank. Indien iemand X gulden op een bank heeft, Y gulden uitgeeft en daarna Z gulden verdient, dan houdt deze persoon aan het eind

$$X - Y + Z$$

gulden over, ook al is Y groter dan X. Hier blijkt dat de negatieve getallen nuttig zijn. Je kunt ze gebruiken om gemakkelijker met de positieve getallen om te gaan.

Maar misschien bent u niet overtuigd, je kunt ook wel zonder negatieve getallen je schulden afbetalen.

Voorbeeld 3. Complexe getallen.

Een veel sterker voorbeeld vormen de complexe getallen. Deze zijn opgebouwd uit de gewone reële getallen en $\sqrt{-1}$. We beschouwen dit gewoon als symbool waarmee je rekent:

$$(4 + \sqrt{-1})(4 - \sqrt{-1}) = 4 \times 4 - (\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}) = 16 + 1 = 17.$$

(In de ‘complexe gehele getallen’ is 17 dus geen priemgetal.)

Het indrukwekkende van deze getallen is dat je daarmee voor gewone vergelijkingen de concrete (positief reële) oplossing kunt uitdrukken. Een vergelijking als

$$x^3 = 15x + 10.$$

heeft een positieve reële oplossing. Deze kan als volgt met behulp van de complexe getallen uitgedrukt worden:

$$x = \sqrt[3]{(5 + 10\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(5 - 10\sqrt{-1})} \approx 4{,}71029785 \ldots .$$

[Hierbij dienen de derdemachts wortels zo gekozen dienen te worden dat geldt

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(5 + 10\sqrt{-1})}\sqrt[3]{(5 - 10\sqrt{-1})} &= \sqrt[3]{((5 + 10\sqrt{-1})(5 - 10\sqrt{-1}))} \\ &= \sqrt[3]{(25 + 100)} = 5.] \end{aligned}$$

Oplossingen van derdegraads vergelijkingen werden in Italië rond 1500 gevonden door Ferro en Tartaglia en opgeschreven door Cardano. Deze laatste durfde nog geen betekenis te hechten aan de imaginaire getallen als $\sqrt{-1}$. Dat gebeurde iets later door een andere Italiaan: Bombelli. In de negentiende eeuw werd bewezen dat de genoemde oplossing zonder imaginaire getallen niet met behulp van worteltekens gegeven kan worden. Weer dus wiskunde voor de wiskunde, maar deze keer van wezenlijk belang.

-=-

Samenvattend kunnen we het volgende stellen. Wiskunde bestaat uit de bestudering van modellen, dat wil zeggen een verzameling van objecten samen met eigenschappen tussen die objecten. Dit kan van belang zijn vanwege de volgende redenen:
1. het model staat in verband met (geabstraheerde delen van) de werkelijkheid;
2. het model is interessant om intrinsieke redenen.
[Denk bij dit laatste aan muziek: het is de intrinsieke structuur van de samenklanken waardoor muziek zijn betekenis krijgt.]

In de klassiek wiskunde worden de objecten en relaties gekozen volgens de eerste mogelijkheid. In de modernere wiskunde worden de objecten en hun relaties gekozen om hun intrinsieke structuur en het daaruit volgende verband met reeds bestaande wiskunde. In deze zin behoren de natuurlijke getallen en de Euclidische meetkunde tot de klassieke wiskunde. De negatieve en complexe getallen behoren tot de moderne wiskunde: we willen altijd kunnen aftrekken of worteltrekken; door deze eigenschappen worden de twee nieuwere modellen bepaald.

Er zitten in de zaal misschien filosofen van de wiskunde. Die zullen de neiging hebben mij in te willen delen bij de formalisten, die de wiskunde zien als alleen maar een spel met symbolen. Tegen hen zeg ik: ‘Mis. Ik ben zowel een formalist als een Platonist (die aan ideeën een objectief bestaan toekennen). De gebruikelijke indeling klopt niet.’ (Zie

bijvoorbeeld [1].) De wiskundige objecten, ook al zijn ze formeel, bestaat echt. Kijk maar

0, S0, SS0, ...

ik kan ze aanraken.

-=-

Tenslotte wil ik u een paar aspecten van de wiskunde mee naar huis geven.

Abstraheren, mits op de juiste manier gedaan, kan tot sterke resultaten leiden. Het reductionisme hoeft het grotere geheel niet te vergeten.

Eén van de motivaties voor het bedrijven van wiskunde is het krijgen van inzicht, van schoonheid. Een andere motivatie bestaat uit de toepassingen, de beheersing van stukjes natuur. Beide motivaties zijn belangrijk. Maar het esthetische element in de wiskunde kan niet gemist worden. Zoals Poincaré heeft betoogd is de schoonheid van de wiskunde een noodzakelijke voorwaarde voor de groei ervan; ook voor de groei van de toegepaste wiskunde.

Sommige politici zeggen steeds: “Ja, maar wetenschap dient iets op te leveren, dient bruikbaar te zijn.” Men doelt hier op het toepassen in de vorm van beheersing van de omstandigheden. Hierop wil ik het volgende zeggen.

Het beheersen van de omstandigheden is inderdaad belangrijk. Maar vergeet niet dat het zijn beperkingen heeft (zowel financieel, politiek, ecologisch, wetenschappelijk als moreel). Bovendien is beheersing altijd tijdelijk: de omstandigheden veranderen voortdurend en verder willen wij mensen steeds wat anders. Schoonheid daarentegen is gratis, onbeperkt en tijdloos.

-=-

Literatuur

[1] Crowe, M.J.
Ten misconceptions about mathematics, in: *History and Philosophy of Modern Mathematics,* W. Aspray and P. Kitscher (Eds.), University of Minessota Press, Minneapolis, 1988, pp. 260-277.

[2] Musil, R.
Der Mann ohne Eigenschaften, Rohwolt Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 1978. Nederlandse vertaling van I. Lesener: *De man zonder eigenschappen,* Meulenhoff, Amsterdam, 1988. (De bladzijde nummers van de citaten verwijzen naar de Nederlandse vertaling.)

[3] Poincaré, H.
Science et Méthode, E. Flamarion, Paris, 1908.