Aspecten van de wiskundige intuïtie

Henk Barendregt
Katholieke Universiteit Nijmegen

1. Rede en intuïtie

In deze lezing richten wij ons op twee geestelijke vermogens, de rede en de intuïtie, zoals deze gebruikt worden bij het beoefenen van de wiskunde. Deze keuze zal bij sommigen overkomen als een beperking van de reikwijdte van die vermogens. Echter, de rede en de intuïtie zijn, volgens onderstaande definitie van deze vermogens, bij de beoefening van de wiskunde tot zeer grote hoogte ontwikkeld. Dus onze keuze is vergelijkbaar met die van de bestudering van de atletiek, wanneer men in spierbewegingen geïnteresseerd is.

Men hoort wel eens dat de rede meer door mannen en de intuïtie meer door vrouwen gehanteerd wordt. Dat is echter een verkeerde voorstelling van zaken: er zouden anders niet zoveel mannelijke wiskundigen zijn. Laten we op het een en ander ingaan.

De rede

Onder de rede verstaan wij hier het vermogen om uit correcte uitspraken langs een vastomlijnde weg te komen tot nieuwe correcte uitspraken. Dit vermogen is gecultiveerd in de beoefening van de wiskunde en heeft, bij de klassieke Grieken, geleid tot het begrip bewijs. De methodologie van het systematisch bewijzen werd geformuleerd door Aristoteles (384-322 v.Chr.). In zijn beschrijving van de zogenaamde axiomatische methode stelt hij dat er *begrippen* zijn (zoals ‘driehoek’) en verder *eigenschappen* (zoals ‘gelijkzijdig’). Begrippen worden met behulp van *definities* bepaald uit reeds eerder bekende begrippen. Omdat men niet oneindig lang door kan gaan met de keten van definities moet men ergens beginnen en zijn er de zogenaamde *primitieve begrippen* welke niet gedefinieerd worden. Eigenschappen worden met behulp van *bewijzen* afgeleid (bewezen) uit reeds eerder bekende eigenschappen. Ook hier moet men ergens beginnen en wel bij de zogenaamde *axioma’s*. Vrij kort na deze beschrijving van de axiomatische methode ontstaat het werk van Euclides (±300 v.Chr.), waarin in dertien delen[1] de toenmalig bekende wiskunde (voornamelijk meetkunde en rekenkunde) grotendeels axiomatisch[2] opgebouwd werd.

In de negentiende eeuw werden bewijzen niet meer gezien als alleen maar een hulpmiddel om vanuit ware uitspraken tot nieuwe ware uitspraken te komen. Men ging de zaak relatief zien: gesteld dat in een redenering de uitspraken $A_1, \dots, A_n$ waar zijn, dan is een uitspraak B die hieruit volgt ook waar. Dus de rede is een methode, die uitgaande van bepaalde uitspraken op grond van syntactische eigenschappen nieuwe uitspraken oplevert, welke relatief[3] waar zijn (wáár in die situaties waarin de uitspraken waarmee men begon dat zijn). Deze stellingen zijn van nut zodra men een situatie aantreft, waarin de primitieve begrippen zo geïnterpreteerd kunnen worden dat de axioma’s waar worden.

De intuïtie

De rede werkt sequentieel: stap voor stap komt men vanuit de aannamen tot nieuwe uitspraken. Bij de intuïtie gaat het anders: men komt opeens tot een uitspraak en men weet eigenlijk niet hoe. Intuïtie vormt een belangrijk element bij de beoefening van de wiskunde en wel op twee manieren. Ten eerste kan een uitspraak verkregen via de intuïtie een belangrijke schakel vormen in een complex bewijs. Deze intuïtieve stap moet nog wel gecontroleerd worden. In een uiteindelijk opgeschreven bewijs ziet men dan vaak niet meer terug of een stap op grond van redeneren of op grond van intuïtie gezet is.

Een ander gebruik van de intuïtie is dat in de uiteindelijke wiskundige verhandelingen niet alle details van de redeneringen staan opgeschreven. Anders zou de tekst namelijk te lang worden. Een wiskundige, die ingevoerd is in het onderwerp van de verhandeling, moet echter in staat zijn de ontbrekende stappen in te vullen op grond van de onvolledige tekst. Hij of zij zal dit meestal meteen kunnen beamen op grond van de tweede vorm van intuïtie, zonder de benodigde stappen uit te voeren. Wij zullen hier later een voorbeeld van geven.

Laten we de eerste vorm de *grote* intuïtie en de tweede vorm de *kleine* intuïtie noemen. De kleine intuïtie komt bij alle wiskundigen voor, anders kan men geen leerboeken of colleges volgen. De grote intuïtie ook, zij het niet in dezelfde mate bij alle beoefenaren van het vak.

Voor de Duitse wiskundige Gauss (1777-1855) kwam de grote intuïtie van God. De Franse wiskundigen Poincaré (1854-1912) en Hadamard (1865-1962) hebben uitgebreid over dit onderwerp geschreven[4]. Poincaré stelt dat de grote intuïtie ontstaat doordat het onbewuste voortdurend met de materie bezig is. De wiskundige schoonheidsbeleving speelt hierbij een belangrijke rol, doordat het onderbewustzijn het bewuste denken ‘wakker maakt’ wanneer er een wiskundige ontdekking gedaan is. Meestal gaan deze gepaard met een grote schoonheidsbelevenis. Daarna moet de intuïtie wel op haar juistheid geverifieerd worden. Hadamard houdt een pleidooi voor het standpunt van Poincaré en geeft er een verdieping aan. Hij stelt dat het onbewuste denken niet volgens lukraak toeval verloopt, maar volgens bepaalde patronen. Hiervoor is wel de juiste geestelijke voorbereiding nodig. Dan maakt de geest in eerste instantie vele combinaties waaruit in tweede instantie de juiste gekozen worden. Verder wijst Hadamard op de parallelle verwerking van de onbewuste processen welke uitmonden in de intuïtie.

2. De rede in kaart gebracht

Aristoteles stelde verder voor om de rede in kaart te brengen in een formele *logica*. Hij gaf een lijst van algemeen geldige regels waarmee men uit correcte uitspraken andere correcte uitspraken kon afleiden. Bijvoorbeeld

$$\frac{\text{Alle mensen zijn sterfelijk} \qquad \text{Socrates is een mens}}{\text{Socrates is sterfelijk}}$$

is zo’n regel[5]. Pas na 2300 jaar slaagde Frege (1848-1925) erin de logica van Aristoteles te voltooien[6] door een eindig stel regels op te schrijven dat voldoende is voor het afleiden van alle gevolgtrekkingen uit een axiomastelsel. Vanaf dat moment was de verzameling van stellingen, die volgen uit een verzameling axioma’s, volledig bepaald. Russell (1872-1970) en Whitehead (1861-1947) gaven aan in hun Principia Mathematica (1910) hoe dit in principe geheel formeel kon gebeuren. Het afleiden kreeg een mechanisch karakter en het leek er even op dat een ideaal van Leibniz (1647-1717) in vervulling kwam. Deze stelde dat men ooit de juistheid van een uitspraak gewoon zou kunnen narekenen. Dit optimisme bleek voor deelgebieden van de wiskunde, zoals de Euclidische meetkunde, op te gaan, maar niet voor alle onderdelen. Allereerst toonde Gödel (1906-1978) in 1931 aan dat voor de meeste axiomasystemen de verzameling gevolgen onvolledig is: er zijn uitspraken die noch bewijsbaar, noch weerlegbaar zijn. Ten tweede toonde Turing (1912-1954) in 1936 aan dat voor dezelfde axiomastelsels de verzameling gevolgen onbeslisbaar is: er is geen computer (programma) waarmee voor willekeurige uitspraken uitgemaakt kan worden of deze afleidbaar is of niet. Bovendien werd duidelijk dat de onvolledigheid en onbeslisbaarheid niet te wijten zijn aan de axiomastelsels in Principia Mathematica of aan de logica van Frege. Het bleek dat de axiomatische methode deze eigenschappen essentieel met zich mee brengt. Desalniettemin kan er indrukwekkende wiskunde mee afgeleid worden en we hebben verder geen betere methode.

Het in kaart brengen van de rede is niet alleen nuttig geweest voor de ‘negatieve’ resultaten van Gödel en Turing. In complexe toepassingen van de (wiskunde in de) informatietechnologie kan de correctheid van uitspraken van levensbelang zijn. Het voordeel van een geheel geformaliseerd bewijs is dat het door een eenvoudig[7] computer programma geverifieerd kan worden. De wiskundige N. G. de Bruijn heeft sinds midden jaren 60 met succes een formele taal ontwikkeld (Automath) waarin bewijzen compact weergegeven kunnen worden om daarna automatisch geverifieerd te worden. Drie aspecten van Automath zijn belangrijk. 1. De taal is getypeerd (een type is zoiets als de dimensie van een grootheid in de fysica); bepaling van het type van een object behoeft geen bewijs. 2. Gedefinieerde begrippen hebben een eigen status en worden niet zoals gebruikelijk in de logica beschouwd als staande voor wat ze betekenen (als alle gedefinieerde begrippen ‘uitgevouwen’ zouden worden, dan volgt een exponentiële explosie). 3. Rekenstappen behoeven geen nadere bewijsstappen. Dat wil zeggen dat als de uitspraak A(2+2) bewezen is, dan is het zelfde bewijs ook geldig voor A(4). Wel dient het algoritme dat de rekenstappen uitvoert, in dit geval de optelling, geverifieerd te worden. Moderne ‘bewijs assistenten’ bestaan uit een interactief programma dat samen met de gebruiker een formeel bewijs produceert; dat bewijs wordt dan op zijn correctheid geverifieerd.

3. Aspecten van de intuïtie

Bij het formaliseren van bestaande wiskunde stellingen (dat is nodig voor de beoogde toepassingen in de informatie technologie) stuit men op de moeilijkheid, dat er in de literatuur altijd een beroep op de (kleine) intuïtie gedaan wordt. We geven een voorbeeld. De definiërende eigenschap van het begrip *continue* functie is ruwweg dat de grafiek ervan getekend kan worden, zonder het potlood van het papier te tillen. De functies $f(x) = \sin x$, $g(x) = cx$ zijn continu; de som van twee continue functies is weer continu. Hieruit volgt dat

$$F_3(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

continu is, maar ook dat hetzelfde geldt voor

$$F_{100}(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin 100x.$$

De continuiteit van $F_3(x)$ kan eenvoudig (formeel) bewezen worden. Het bewijs voor $F_{100}(x)$ gaat 'net zo', zien we intuïtief, maar het is vervelend om op te schrijven.

Door onderscheid te maken tussen uitdrukkingen als 'sin x + sin 2x' en de betekenis ervan (te weten de functie sin x + sin 2x), kan men echter op snelle wijze tot een geheel formeel bewijs van deze functies komen. Men voert een formele taal L in en bewijst formeel dat alle uitdrukkingen in L een continue functie weergeven. Daarvoor is het nodig dat er een semantische operatie [ ] gedefinieerd wordt, die aan uitdrukkingen in L een concrete functie (op de reële getallen) toevoegt met bijvoorbeeld de eigenschap

$$[\text{'sin x + sin 2x'}](x) = \sin x + \sin 2x.$$

Als men dan wil bewijzen dat $F_{100}(x)$ continu is, dan hoeft men alleen naar het syntactische niveau te kijken waarop deze functie aan ons gegeven is en dan de algemene stelling toe te passen[8]. Op grond van introspectie kan men inzien dat in dit geval de kleine intuïtie ook precies zo werkt, hoewel dit bij de meeste wiskundigen niet bewust gebeurd.

Samenvattend is de analyse van een bescheiden deel van de (kleine) intuïtie als volgt.

Om in te zien dat een wiskundig object x een eigenschap P heeft, gebruikt men dat x de interpretatie is van een expressie e (x=[e]) uit een zekere taal L en een stelling die zegt dat voor alle expressies e de interpretatie van e de eigenschap P heeft (∀e∈L P[e]).

De uitdrukking e is meestal gemakkelijk te bepalen omdat de meeste wiskundige objecten x toch al in de vorm x=[e] aan ons gegeven worden.

Met behulp van deze 'twee-niveau' methode kan een redelijk deel van de kleine intuïtie in kaart gebracht worden. Het valt nog te bezien wat de reikwijdte daarvan is. Helemaal niet duidelijk is of ook de grote intuïtie zodanig in kaart gebracht kan worden, dat uiteindelijk computers beter worden in het bewijzen van wiskundige stellingen dan mensen. Er zijn vooralsnog geen redenen om dit principieel uit te sluiten, maar voorlopig zal het niet gebeuren.

---

[1] Sommige delen zijn door eerdere wiskundigen, zoals Eudoxos (ca. 400 v. Chr.), geschreven.

[2] Voor de Grieken was een primitief begrip zó duidelijk (bijvoorbeeld het begrip 'punt'), dat het geen definitie behoeft; eveneens was voor hen een axioma (bijvoorbeeld 'Door twee verschillende punten gaat precies één rechte') zó waar, dat het geen bewijs behoeft. Dat is niet geheel bevredigend. Pas veel later gaf Hilbert (1862-1943) een wel bevredigende interpretatie aan de axiomatische methode: het doet er niet toe wat de primitieve begrippen zijn, als ze maar zo geïnterpreteerd worden dat de axioma's waar worden. Met andere woorden: de axioma's vormen een impliciete definitie van de primitieve begrippen.

[3] Deze visie op het redeneren sluit natuurlijk goed aan bij Hilbert's visie op de axiomatische methode.

[4] H. Poincaré: Science et méthode, Flammarion, Paris, 1916; J. Hadamard: Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique, A. Blanchart, Paris, 1959.

[5] In de moderne logica, waar de regels niet van ware naar ware uitspraken hoeven te gaan, zou men beter als voorbeeld kunnen nemen: Alle mensen zijn onsterfelijk, Socrates is een mens, dus Socrates is onsterfelijk.

[6] Er zijn ook andere logische systemen, zoals de intuitionistische of de lineaire logica. Deze kunnen we als verfijningen van de logica van Aristoteles en Frege opvatten. Ook zijn er logische systemen met een andere doelstelling.

[7] Eenvoud is van belang voor de belangrijke methodologische vraag of het verifiërende programma correct is. Wanneer dit programma nu eenvoudig is, dan kan men door inspectie ervan tot de overtuiging komen dat de verificatie goed wordt uitgevoerd.

[8] De feiten dat bijvoorbeeld 'sin x + sin 2x' tot L behoort en dat ['sin x + sin 2x'](x) = sin x + sin 2x geldt behoeven in Automath geen bewijs, maar worden, om Poincaré te citeren, gewoon geverifieerd.